Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

9-й класс

Решения

1. Можно ли в выражении

$$2 * 0 * 1 * 2 * 2 * 0 * 1 * 2 * \cdots * 2 * 0 * 1 * 2 = 2013$$

(слева — 2013 групп, каждая из которых состоит из цифр 2, 0, 1, 2) поставить вместо звёздочек знаки сложения и умножения (скобки ставить нельзя) так, чтобы получилось верное равенство?

Ответ: можно.

Решение.

С помощью одной группы можно получить: $0 = 2 \cdot 0 \cdot 1 \cdot 2$, $2 = 2 + 0 \cdot 1 \cdot 2$, $4 = 2 + 0 + 1 \cdot 2$, $5 = 2 + 0 + 1 + 2$. Если между группами поставить плюсы, взять 1000 групп по 2, 2 группы по 4, одну группу с 5, а остальные — нулевые, то всё получится.

Замечание. Разумеется, существует масса других способов.

2. Можно ли в клетках таблицы 2012×2013 (2012 строк и 2013 столбцов) расставить числа ± 1 так, чтобы произведение чисел в каждой строке и в каждом столбце было отрицательным?

Ответ: нельзя.

Решение.

Если перемножить все числа в таблице, то с одной стороны должно получиться $(-1)^{2012} = 1$, если смотреть по строкам, а с другой — $(-1)^{2013} = -1$, если смотреть по столбцам.

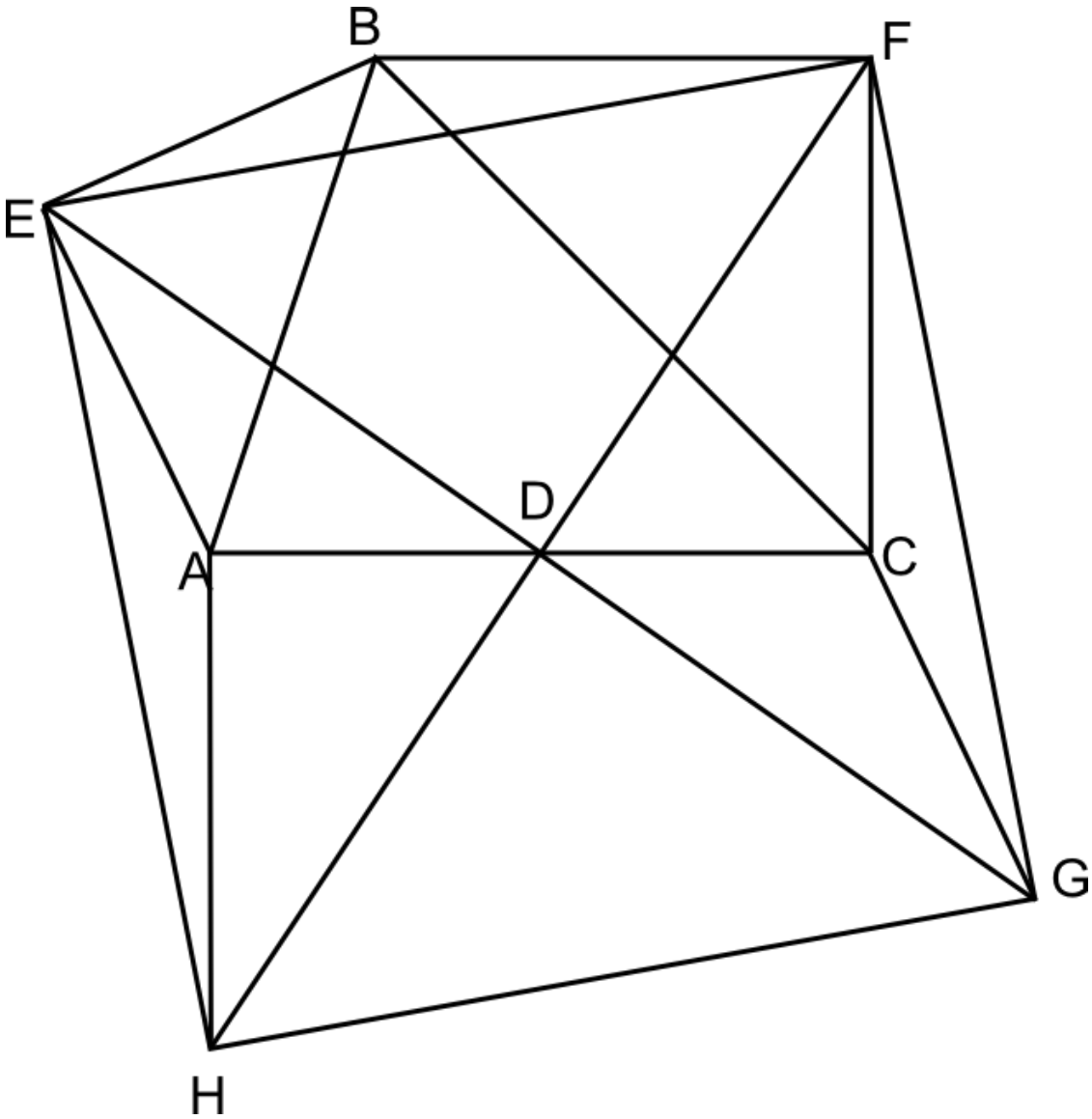
3. Доказать, что уравнение $x^2 + y^3 + z^4 = w^7$
   1) имеет хотя бы одно решение в натуральных числах;
   2) имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

Решение.

1) Можно взять числа $x = 3^{24}$, $y = 3^{16}$, $z = 3^{12}$, $w = 3^7$:
$(3^{24})^2 + (3^{16})^3 + (3^{12})^4 = 3^{48} + 3^{48} + 3^{48} = 3 \cdot 3^{48} = 3^{49} = (3^7)^7$.
2) Имея одно решение (x, y, z, w), для любого натурального k можно выписать новое: $(k^{3 \cdot 4 \cdot 7}x, k^{2 \cdot 4 \cdot 7}y, k^{2 \cdot 3 \cdot 7}z, k^{2 \cdot 3 \cdot 4}w)$. В самом деле,
$(k^{3 \cdot 4 \cdot 7}x)^2 + (k^{2 \cdot 4 \cdot 7}y)^3 + (k^{2 \cdot 3 \cdot 7}z)^4 = k^{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7}(x^2 + y^3 + z^4) =$
$= k^{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7}w^7 = (k^{2 \cdot 3 \cdot 4}w)^7$.

4. На сторонах AB и BC треугольника ABC вне его построены равнобедренные прямоугольные треугольники ABE и BCF с прямыми углами E и F соответственно, D — середина стороны AC. Доказать, что треугольник DEF — равнобедренный прямоугольный с прямым углом D.

Решение.



Пусть точки G и H симметричны соответственно точкам E и F относительно точки D. Тогда $EFGH$ — параллелограмм. Докажем, что треугольники EBF и GCF равны. В самом деле, $GC = AE = EB$. Первое равенство справедливо, так как $AECG$ — параллелограмм (до конца не прорисованный) по той же причине, что и $EFGH$. Второе следует из определения треугольника ABE. $BF = CF$ из определения треугольника BCF. Далее, для углов получаем $EBF = ABC + 2 \cdot 45°$. $AECG$ — параллелограмм, поэтому $DCG = DAE = BAC + 45°$. Тогда $GCF = 360° - DCG - ACB - 45° = 360° - BAC - 45° - ACB - 45° = 270° - (BAC + ACB) = 270° - (180° - ABC) = 90° + ABC = EBF$. Итак, треугольники EBF и GCF равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $EF = FG$, и параллелограмм $EFGH$ является ромбом. Наконец, угол BFE равен углу CFG, а угол BFC — прямой, откуда и угол EFG — прямой, поэтому ромб $EFGH$ представляет собой квадрат, и мы доказываем требуемое.

Замечание.

Если угол ABC — тупой, чертёж отличается от приведённого выше, но рассуждение остаётся таким же. Если правильно рассмотрен только один из двух случаев, то оценку снижать не следует.

5. Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 разбили на две группы. Доказать, что хотя бы в одной из двух групп найдутся три числа, одно из которых представляет собой среднее арифметическое двух других.

Решение.

От противного. Предположим, что построено разбиение на две группы, внутри каждой из которых не существует ни одной тройки чисел, одно из которых представляет собой среднее арифметическое двух других. Группа, в которую попала единица, выделяется подчёркиванием снизу, а вторая — подчёркиванием сверху.
Итак, имеем: $\underline{1}$ 2 3 4 5 6 7 8 9.

СЛУЧАЙ 1: $\underline{1}$ $\underline{2}$ 3 4 5 6 7 8 9. Тогда $\underline{1}$ $\underline{2}$ $\overline{3}$ 4 5 6 7 8 9.

СЛУЧАЙ 1А: $\underline{1}\ \underline{2}\ \overline{3}\ \underline{4}\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9$. Тогда последовательно: $\underline{1}\ \underline{2}\ 3\ \underline{4}\ 5\ \overline{6}\ 7\ 8\ 9$, $\underline{1}\ \underline{2}\ \overline{3}\ \underline{4}\ 5\ \overline{6}\ \overline{7}\ 8\ 9$, $\underline{1}\ \underline{2}\ 3\ \underline{4}\ \underline{5}\ \overline{6}\ \overline{7}\ 8\ 9$. Предпоследнее число нельзя, очевидно, отнести ни к одной из групп.

СЛУЧАЙ 1Б: $\underline{1}\ \underline{2}\ \overline{3}\ \overline{4}\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9$. Далее: $\underline{1}\ \underline{2}\ \overline{3}\ \overline{4}\ \underline{5}\ 6\ 7\ 8\ 9$, $\underline{1}\ \underline{2}\ \overline{3}\ \overline{4}\ \underline{5}\ 6\ 7\ \overline{8}\ 9$, $\underline{1}\ \underline{2}\ \overline{3}\ \overline{4}\ \underline{5}\ \underline{6}\ 7\ \overline{8}\ 9$, $\underline{1}\ \underline{2}\ \overline{3}\ \overline{4}\ \underline{5}\ \underline{6}\ \overline{7}\ \overline{8}\ 9$. Последнее число нельзя, очевидно, отнести ни к одной из групп.

СЛУЧАЙ 2: $\underline{1}\ \overline{2}\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9$.

СЛУЧАЙ 2А: $\underline{1}\ \overline{2}\ \underline{3}\ \underline{4}\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9$. Имеем: $\underline{1}\ \overline{2}\ \underline{3}\ \underline{4}\ \overline{5}\ 6\ 7\ 8\ 9$, $\underline{1}\ \overline{2}\ \underline{3}\ \underline{4}\ \overline{5}\ 6\ \overline{7}\ 8\ 9$, $\underline{1}\ \overline{2}\ \underline{3}\ \underline{4}\ \overline{5}\ \underline{6}\ \overline{7}\ 8\ 9$. Предпоследнее число нельзя, очевидно, отнести ни к одной из групп.

СЛУЧАЙ 2Б: $\underline{1}\ \overline{2}\ \underline{3}\ \overline{4}\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9$. Получаем: $\underline{1}\ \overline{2}\ \underline{3}\ \overline{4}\ \overline{5}\ 6\ 7\ 8\ 9$, $\underline{1}\ \overline{2}\ \underline{3}\ \overline{4}\ \overline{5}\ \underline{6}\ 7\ 8\ 9$, $\underline{1}\ \overline{2}\ \underline{3}\ \overline{4}\ \overline{5}\ \underline{6}\ 7\ \underline{8}\ 9$, $\underline{1}\ \overline{2}\ \underline{3}\ \overline{4}\ \overline{5}\ \underline{6}\ \overline{7}\ \underline{8}\ 9$. Последнее число нельзя, очевидно, отнести ни к одной из групп.

СЛУЧАЙ 2В: $\underline{1}\ \overline{2}\ \overline{3}\ \underline{4}\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9$. Теперь: $\underline{1}\ \overline{2}\ \overline{3}\ \underline{4}\ 5\ 6\ \overline{7}\ 8\ 9$, $\underline{1}\ \overline{2}\ \overline{3}\ \underline{4}\ \underline{5}\ 6\ \overline{7}\ 8\ 9$, $\underline{1}\ \overline{2}\ \overline{3}\ \underline{4}\ \underline{5}\ \overline{6}\ \overline{7}\ 8\ 9$. Последнее число нельзя, очевидно, отнести ни к одной из групп.

Полученное противоречие доказывает требуемое.

6. Пусть a, b и c — натуральные числа, причём a^3 делится на b, b^3 — на c, а c^3 — на a. Докажите, что $(a+b+c)^{13}$ делится на abc.

Решение.

Если одно из трёх чисел равно 1, то два других также равны 1, и утверждение верно.

Пусть теперь ни одно из трёх чисел не равно 1. Тогда по основной теореме арифметики (каждое натуральное число, большее единицы, единственным образом раскладывается в произведение простых чисел) получаем, что все три числа состоят из одних и тех же простых множителей:

$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, $b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_k^{\beta_k}$, $c = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \cdots p_k^{\gamma_k}$.

Понятно, далее, что $\beta_i \le 3\alpha_i,\ \gamma_i \le 3\beta_i,\ \alpha_i \le 3\gamma_i,\ i = \overline{1,\ k}$.

Пусть $\delta_i = min\{\alpha_i,\ \beta_i,\ \gamma_i\},\ i = \overline{1,\ k}$. Вынося за скобки общие множители, получим $a+b+c = p_1^{\delta_1} p_2^{\delta_2} \cdots p_k^{\delta_k} m$. После возведения в 13−ю степень число $(a+b+c)^{13}$ будет содержать p_i в степени $13\delta_i$, а

число abc содержит p_i в степени $\alpha_i + \beta_i + \gamma_i$. Осталось показать, что $13\delta_i \geq \alpha_i + \beta_i + \gamma_i$. В самом деле, если $\delta_i = \alpha_i$, получим $\alpha_i + \beta_i + \gamma_i \leq \alpha_i + \beta_i + 3\beta_i = \alpha_i + 4\beta_i \leq \alpha_i + 4 \cdot 3\alpha_i = 13\delta_i$, что и требовалось. Остальные случаи рассматриваются совершенно аналогично.